ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVII.

1900

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1900

del secondo di questi fungilli nelle culture fatte in camera umida, con manifesta prevalenza sugli altri ifomiceti che lo accompagnavano.

Tenendo conto pertanto di quanto è stato superiormente esposto, e principalmente delle alterazioni cui vanno soggetti i semi di questa forma che con tanta facilità sono attaccati dai funghi, nonchè del presentarsi essa qua e là sporadica e mai coltivata in veri e propri boschi, crederei poter ritenere ch' essa non sia una vera e propria varietà, ma piuttosto uno stato patologico della pianta, che anzichè riprodursi per seme, dipenda dalle condizioni dell' ambiente in cui la pianta si trova. A questa alterazione, che forse dipende da una specie di cachessia che principalmente interessa l' invoglio del seme in via di maturazione, e talora anche la mandorla, potrebbe darsi il nome di *Spermonecrosi del pino*, manifestandosi appunto come una necrosi più o men pronunciata dell' invoglio del seme nel corso della maturazione. Certamente io non pretendo di aver fatto gran cosa sopra questo argomento, ma solo di aver aperto la via ad una serie di ricerche interessanti, fra le quali debbono pure registrarsi quelle relative alle condizioni in cui la pianta vive rispetto all' ambiente, le quali sono pure d' importanza per la soluzione di una tale questione, e che fino ad ora furono del tutto trascurate.

Matematica. — *Sopra alcune superficie a linee di curvatura isoterme*. Nota del dott. P. Burgatti, presentata dal Socio V. Cerruti.

1. La determinazione di tutte le superficie a linee di curvatura isoterme dipende dall' integrazione di una equazione alle derivate parziali del 4° ordine e non lineare: costituisce quindi nella sua generalità un problema molto difficile. Questo problema può essere anche posto sotto un' altra forma, la quale non ne diminuisce le difficoltà, ma permette di aggiungere qualche nuova soluzione particolare a quelle già conosciute. L' enunciato cui alludo si deduce da un noto teorema di Darboux (¹), e può essere diviso nelle due parti seguenti:

1) Determinare tutte le funzioni φ di u e v tali, che l' equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\log\varphi}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\log\varphi}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} \tag{1}$$

ammetta tre soluzioni x, y, z legate dalla relazione

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0; \tag{2}$$

(¹) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. T. I, pag. 127 e seg.

2) Trovate le funzioni φ, determinare tutte le terne di soluzioni della (1) che soddisfanno la condizione (2). Orbene, se si osserva che x, y e z risultano rispettivamente soluzioni del sistema

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial v} = \dfrac{\partial \log\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\theta}{\partial u} + \dfrac{\partial\log\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = c\,, \end{cases}$$

ove c è una certa funzione, la cui espressione è diversa per ciascuna delle tre soluzioni, viene subito in mente di cercare tutti i sistemi (3) che ammettono una soluzione con due costanti arbitrarie, cioè tutti i sistemi della forma (3) *completi*. Le condizioni, perchè il sistema (3) sia completo, si ottengono facilmente, o con l'aiuto di particolari artefizî, o con l'applicazione diretta di un metodo generale proposto dal prof. L. Bianchi (¹). Esse si riducono alle seguenti:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(2a + \dfrac{\partial \log a}{\partial v}\right) = \dfrac{\partial}{\partial v}\left(2b + \dfrac{\partial\log b}{\partial u}\right) = \dfrac{\partial b}{\partial v} + \dfrac{\partial a}{\partial u} + 4\,a\,b \\ \log c = \log\gamma + \displaystyle\int\left(2a + \frac{\partial\log a}{\partial v}\right)dv + \left(2b + \frac{\partial \log b}{\partial u}\right)du\,, \end{cases}$$

ove ho indicato con a e b i coefficienti di $\dfrac{\partial\theta}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial\theta}{\partial v}$, e con γ una costante arbitraria (²).

Supponendo queste condizioni verificate per il sistema (3), si vede subito che c e θ saranno date da espressioni della forma seguente:

$$c = \gamma\, f(u\,,v) \qquad \theta = \gamma \mathrm{F}(u\,,v\,,\alpha) + \beta\,,$$

ove α e β sono costanti arbitrarie; talchè, scelte tre costanti γ_1, γ_2 e γ_3 legate dalla relazione $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$, le formule

$$x = \gamma_1\,\mathrm{F}(u\,,v\,,\alpha_1)$$
$$y = \gamma_2\,\mathrm{F}(u\,,v\,,\alpha_2)$$
$$z = \gamma_3\,\mathrm{F}(u\,,v\,,\alpha_3)$$

definiranno delle superficie a linee di curvatura isoterme, e u, v saranno i parametri di tali linee.

(¹) *Sulle soluzioni comuni a due equazioni alle derivate parziali del 2° ordine*... Rend. Acc. Lincei, Serie IV, vol. II, 1885-86.

(²) Le condizioni (4) sono state dedotte dal sig. Tzitzéica in una Nota recente: *Sur une classe d'équations de Laplace*. Bulletin des sciences mathém. Serie II, t. XXIV, 1900.

2. Nel caso nostro è $\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v}$, per cui le (4) danno

$$\frac{\partial^2 \log a}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \log b}{\partial u\, \partial v} = 4\, a\, b\,,$$

ossia

$$\frac{\partial^2 \log \frac{a}{b}}{\partial u\, \partial v} = 0\,;$$

per conseguenza sarà $\frac{a}{b} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}$, essendo U e V funzione rispettivamente della sola u e della sola v, e si potrà porre

$$a = \lambda\, \mathrm{U} \qquad b = \lambda\, \mathrm{V}\,.$$

Di quì risulta che ci si può limitare al caso di $a = -b = \lambda$, facendo un opportuno cambiamento di parametri. Allora φ è una funzione di $u - v$, e sarà anche $\lambda = \lambda\,(u - v) = \lambda\,(t)$. Ricorrendo nuovamente alle (4), si trova che questa funzione λ deve soddisfare l'equazione

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = \pm\, 2 \sqrt{\lambda^2 + h^2}\,, \tag{5}$$

ove h è una costante arbitraria. Vi sono perciò tre casi da considerare: $h = 0$, $h^2 > 0$, $h^2 < 0$. Per ciascuna di queste ipotesi si ottengono due espressioni per λ e due corrispondenti per c, secondochè si considera il segno positivo o il negativo. Dopo i calcoli necessarî, che io qui tralascio per brevità, si giunge a un risultato notevole, il quale si può enunciare così: *Tutti i sistemi della forma* (3) *completi sono riducibili a una delle forme qui appresso indicate, nella quale figurano per brevità i simboli di Monge:*

caso di $h = 0$ (6) $\begin{cases} s = \dfrac{1}{2\,(u - v)}\,(p - q) \\ p\,q = \mathrm{A} \end{cases}$ (6′) $\begin{cases} s = \dfrac{1}{2\,(u - v)}\,(p - q) \\ p\,q = \dfrac{\mathrm{A}}{(u - v)^2} \end{cases}$

caso di $h^2 < 0$ (7) $\begin{cases} s = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 2\,(u - v)}\,(p - q) \\ p\,q = \dfrac{\mathrm{A}}{\operatorname{sen}^2 (u - v)} \end{cases}$ (7′) $\begin{cases} s = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} 2(u - v)}(p - q) \\ p\,q = \dfrac{\mathrm{A}}{\cos^2 (u - v)} \end{cases}$

caso di $h^2 > 0$ (8) $\begin{cases} s = \dfrac{1}{\operatorname{senh} 2\,(u - v)}\,(p - q) \\ p\,q = \dfrac{\mathrm{A}}{\operatorname{senh}^2 (u - v)} \end{cases}$ (8′) $\begin{cases} s = -\dfrac{1}{\operatorname{senh} 2(u - v)}(p - q) \\ p\,q = \dfrac{\mathrm{A}}{\cosh^2 (u - v)} \end{cases}$

ove A è una costante arbitraria.

3. L'integrazione di questi sistemi non presenta difficoltà, ma i calcoli sono piuttosto lunghi. Perciò mi limito a considerare un sistema solo, per esempio il sistema (7). I ragionamenti e i calcoli che servono per giungere all'integrazione di questo sistema valgono per tutti gli altri, senza notevoli modificazioni. Dal sistema (7) si deduce [1]:

$$\frac{\partial p^2}{\partial v} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2(u-v)}\left(p^2 - \frac{A}{\operatorname{sen}^2(u-v)}\right)$$
$$\frac{\partial q^2}{\partial u} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2(u-v)}\left(\frac{A}{\operatorname{sen}^2(u-v)} - q^2\right),$$

dalle quali, integrando, si trae:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tang}(u-v)\,p^2 &= -2A\cot 2(u-v) + U \\ \operatorname{tang}(u-v)\,q^2 &= -2A\cot 2(u-v) + V, \end{aligned}$$

essendo U e V funzioni rispettivamente della sola u e della sola v. Moltiplicando poi membro a membro queste due equazioni, e sostituendo a pq la sua espressione, si trova la seguente equazione funzionale:

$$4A^2 = -2A\cot 2(u-v)\,.\,(U+V) + UV,$$

la quale serve per determinare U e V. Posto $U = 2AU_0$, $V = -2A\,V_0$, essa diventa

$$1 = -\cot 2(u-v)\;(U_0 - V_0) - U_0V_0,$$

ossia

$$\frac{1 + U_0V_0}{V_0 - U_0} = \cot 2(u-v).$$

Se ora si osserva che

$$u - v = (u-\alpha) - (v-\alpha), \quad (\alpha = \text{cost. arb.})$$

si ottiene

$$\frac{1+U_0V_0}{V_0-U_0} = \frac{1+\cot 2(u-\alpha)\cot 2(v-\alpha)}{\cot 2(v-\alpha) - \cot 2(u-\alpha)},$$

alla quale si soddisfa prendendo

$$U_0 = \cot 2(u-\alpha), \quad V_0 = \cot 2(v-\alpha).$$

Restano così determinate le espressioni di U e V, in conseguenza delle quali le (9) diventano

$$p^2 = 2A\,\frac{-\cot 2(u-v) + \cot 2(u-\alpha)}{\operatorname{tang}(u-v)}$$
$$q^2 = -2A\,\frac{\cot 2(u-v) + \cot 2(v-\alpha)}{\operatorname{tang}(u-v)}.$$

[1] Tzitzéica, nota citata.

La soluzione che si cerca è definita dall' equazione differenziale

$$d\theta = p\,du + q\,dv\,,$$

ove p e q hanno le espressioni precedenti. Per integrarla facilmente conviene cambiare le variabili, ponendo

$$\cot(u-\alpha) = \xi\,, \quad \cot(v-\alpha) = \eta\,.$$

Si trova allora

$$d\theta = \frac{\mathrm{B}}{\xi-\eta}\left(\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\,d\xi - \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\,d\eta\right) \qquad (\mathrm{B}^2 = -\mathrm{A})\,,$$

da cui

$$\theta = -\mathrm{B}\log\frac{\sqrt{\eta}+\sqrt{\xi}}{\sqrt{\eta}-\sqrt{\xi}}$$

$$= -\mathrm{B}\log\frac{\sqrt{\cot(v-\alpha)}+\sqrt{\cot(u-\alpha)}}{\sqrt{\cot(v-\alpha)}-\sqrt{\cot(u-\alpha)}}\,,$$

trascurando la costante d' integrazione.

In questa maniera si perviene a determinare le formule che definiscono le classi di superficie a linee di curvatura isoterme, corrispondenti ai sei sistemi di equazioni in discorso. Io le indico qui appresso, e distinguo ogni classe di superficie con un numero, uguale a quello del sistema differenziale dal quale si deducono; trascurando però quelle corrispondenti al sistema (6), perchè sono ben note (quadriche a centro):

$$(6')\quad\left\{\begin{aligned} x &= -\mathrm{A}\log\frac{\sqrt{v-\alpha}+\sqrt{u-\alpha}}{\sqrt{v-\alpha}-\sqrt{u-\alpha}}\\ y &= -\mathrm{B}\log\frac{\sqrt{v-\beta}+\sqrt{u-\beta}}{\sqrt{v-\beta}-\sqrt{u-\beta}}\\ z &= -\mathrm{C}\log\frac{\sqrt{v-\gamma}+\sqrt{u-\gamma}}{\sqrt{v-\gamma}-\sqrt{u-\gamma}}\end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned} x &= -\mathrm{A}\log\frac{\sqrt{\cot(v-\alpha)}+\sqrt{\cot(u-\alpha)}}{\sqrt{\cot(v-\alpha)}-\sqrt{\cot(u-\alpha)}}\\ y &= -\mathrm{B}\log\frac{\sqrt{\cot(v-\beta)}+\sqrt{\cot(u-\beta)}}{\sqrt{\cot(v-\beta)}-\sqrt{\cot(u-\beta)}}\\ z &= -\mathrm{C}\log\frac{\sqrt{\cot(v-\gamma)}+\sqrt{\cot(u-\gamma)}}{\sqrt{\cot(v-\gamma)}-\sqrt{\cot(u-\gamma)}}\end{aligned}\right.$$

$$(7')\quad\left\{\begin{aligned} \alpha &= 2\sqrt{\mathrm{A}}\,\mathrm{arcot}\sqrt{\cot(v-\alpha)\cot(u-\alpha)}\\ y &= 2\sqrt{\mathrm{B}}\,\mathrm{arcot}\sqrt{\cot(v-\beta)\cot(u-\beta)}\\ z &= 2\sqrt{\mathrm{C}}\,\mathrm{arcot}\sqrt{\cot(v-\gamma)\cot(u-\gamma)}\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{A}\log\frac{\sqrt{\coth(v-\alpha)}+\sqrt{\coth(u-\alpha)}}{\sqrt{\coth(v-\alpha)}-\sqrt{\coth(u-\alpha)}}\\ y &= \mathrm{B}\log\frac{\sqrt{\coth(v-\beta)}+\sqrt{\coth(u-\beta)}}{\sqrt{\coth(v-\beta)}-\sqrt{\coth(u-\beta)}}\\ z &= \mathrm{C}\log\frac{\sqrt{\coth(v-\gamma)}+\sqrt{\coth(u-\gamma)}}{\sqrt{\coth(v-\gamma)}+\sqrt{\coth(u-\gamma)}}\end{aligned}\right.$$

$$(8')\quad\left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{\mathrm{A}}\log\frac{1+\sqrt{\coth(v-\alpha)\coth(u-\alpha)}}{1-\sqrt{\coth(v-\alpha)\coth(u-\alpha)}}\\ y &= \sqrt{\mathrm{B}}\log\frac{1+\sqrt{\coth(v-\beta)\coth(u-\beta)}}{1-\sqrt{\coth(v-\beta)\coth(u-\beta)}}\\ z &= \sqrt{\mathrm{C}}\log\frac{1+\sqrt{\coth(v-\gamma)\coth(u-\gamma)}}{1-\sqrt{\coth(v-\gamma)\coth(u-\gamma)}}\end{aligned}\right.$$

In queste formule le costanti α, β, γ sono arbitrarie, e le A, B, C devono soddisfare alla sola relazione $A + B + C = 0$, oppure $A^2 + B^2 + C^2 = 0$, secondochè esse sono sottoposte o no al segno di radice.

Lo studio completo delle superficie ora trovate eccede i limiti e lo scopo di questa Nota. Tuttavia mi piace far notare che l'elemento lineare delle superficie (6′) è a coefficienti razionali, e ha una forma notevole. Supponendo, per esempio, $\alpha > \beta > \gamma$, e prendendo

$$A^2 = \frac{\alpha}{(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)} \qquad B^2 = \frac{\beta}{(\beta - \gamma)(\alpha - \beta)} \qquad C^2 = \frac{\gamma}{(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)}$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma < 0$, si trova per l'elemento lineare la forma seguente:

$$ds^2 = \frac{1}{v - u}\left\{\frac{u\,du^2}{(\alpha - u)(u - \beta)(u - \gamma)} + \frac{v\,dv^2}{(v - a)(v - \beta)(v - \gamma)}\right\}.$$

I parametri u e v variano rispettivamente fra α e β, α e $+\infty$, e la corrispondente superficie definita dalle (6′) è reale. Si ottiene pure una superficie reale prendendo $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\gamma < 0$, A e B immaginarie. In questo caso u varia fra β e γ, v fra α e $+\infty$.

Zoologia. — *Propagazione delle filarie del sangue, esclusivamente per mezzo della puntura delle zanzare.* II Nota preliminare di G. Noè, presentata dal Socio B. Grassi.

Nella Nota preliminare del 25 agosto, il prof. Grassi ed io riferivamo un esperimento, in seguito al quale si poteva asserire che la *filaria immitis*, ed in genere tutte le *filarie del sangue* vengono dalle zanzare direttamente trasmesse all' ospite definitivo per mezzo della puntura. L' esperimento citato era dimostrativo in modo assoluto, perchè noi stessi avevamo iniettate sotto la cute di un cane le larve mature di filaria; tuttavia, il rigore dell' analisi scientifica richiedeva che il ciclo evolutivo della filaria si compisse naturalmente.

Lo scopo di questa Nota è appunto quello di render palesi i risultati ottenuti, per questa via, dagli esperimenti già annunciati nella prima Nota preliminare.

Un cane, dell' età di un anno, sano, venne punto nello scorso agosto per parecchi giorni di seguito da *Anopheles claviger*, presi qua e là a Porto di Fiumicino, dove sei, degli otto cani che vi si trovavano, erano filariosi. Le zanzare di questa località, erano infette, nell' agosto, nella proporzione circa di 2, o 3 per cento. Si esperimentava in questo modo: si imbavagliava strettamente la bocca del cane per impedirgli di mangiare le zanzare che lo