ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVII.

1900

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1900

stessi, prendono cariche positive, le quali possono raggiungere potenziali abbastanza elevati.

La grossa tornitura di rame pigiata molto in un tubo di vetro o di metallo prende, per l'aria ixata, carica positiva; ma messavi in piccola quantità e rada, prende carica negativa.

Dei cilindri di diverse altezze, fatti con foglie di rete di una medesima larghezza, messi in tubi di vetro o di metallo e traversati dall'aria ixata, prendono cariche positive se sono lunghi, e negative se sono brevi: nelle mie ricerche le cariche positive crebbero con la lunghezza dei cartocci a partire da una quindicina di centimetri, e le negative crebbero col diminuire delle medesime lunghezze fra 12 e 2 cm. circa.

Un nastrino di rete largo 2 cm. e variamente lungo (da 20 a 60 cm.), accartocciato in un cilindretto alto 2 cm. e posto in un tubo di vetro o di ottone, prese carica positiva o negativa per l' aria ixata, a seconda che trovavasi molto stretto e pigiato o lento nel tubo.

I fenomeni precedenti non pare possano attribuirsi ad azioni chimiche; essi sembrano invece dovuti (fatto le debite riserve), ad uno speciale strofinìo dell' aria ixata sulle superficie metalliche; però una sola delle cariche si osserva sulle superficie metalliche, mentre l' altra non si manifesta nell'aria, forse perchè si spende per convertire l'aria ixata in aria ordinaria. In una altra Nota ho difatti dimostrato, che l'aria ixata può trasformarsi in aria ordinaria per mezzo dell' elettricità, che sparisce; però questa spiegazione non è che una ipotesi.

Matematica. — *Sulla teoria delle funzioni e degli insiemi.* Nota di Beppo Levi, presentata dal Corrispondente C. Segre.

Il concetto di funzione che noi dobbiamo al Dirichlet appare siffattamente generale che, se si astrae da alcune nozioni generali e da proprietà che discendono piuttosto dalle definizioni di queste che dal concetto medesimo di funzione [1], si può dire che nessuna proposizione siasi fin qui ottenuta, applicabile a tutte le funzioni; e più di un autore esprime la convinzione o il dubbio dell' impossibilità di una tal proposizione [2].

(1) Tali le nozioni d' oscillazione, di massimo, di minimo, ... Per proprietà notevoli di esse vedasi il 1° Capitolo della « Thèse » del sig. Baire: *Sur les fonctions de variables réelles.* (Milano 1899 e Annali di Matematica 1899), Memoria notevole, su alcuni risultati della quale dovremo tornare in seguito.

(2) Così il Jordan (Cours d'Analyse, t. III, 1887, pag. 557 et 2ème éd. t. I, p. 31, 1893): così, pare, il Borel (*Leçons sur la théorie des fonctions*, pag. 126, 1898) che, pure ammettendo la possibilità di proposizioni generali, riconosce però come tale il teorema del Darboux sull'esistenza degl' integrali superiore ed inferiore, il quale non si applica a *tutte le funzioni*, ma alle sole *limitate*.

Ciò nondimeno, un' analisi minuta toglie a quel concetto tale indeterminazione, e conduce a riconoscervi limitazioni tali da permetterci di enunciare proposizioni generali, e che non paiono prive d' importanza.

Appunto una tale proposizione io mi propongo di enunciare qui e di indicarne alcune applicazioni alla teoria degl' insiemi, a quella delle funzioni, e a questioni geometriche ([1]).

1. La nozione generale di funzione si connette a quella d' insieme di numeri (o di punti). Sia x un numero ([2]) variabile in un determinato campo (o insieme); un altro numero y si dice funzione di x in detto campo se per ogni valore di x, scelto ad arbitrio in quel campo, è *assegnato* per y un sistema Y di valori, che si diranno corrispondenti a quel valore di x ([3]).

Riunendo x ed Y in un sol gruppo si avrà un insieme di gruppi il quale rappresenta la funzione. Inversamente, ogni insieme *ben definito* di gruppi di numeri in ciascuno dei quali sia distinto un numero x, rappresenta una funzione che fa corrispondere a quegli x gli altri numeri dei gruppi rispettivi come valori di y.

Vuolsi qui dar gran rilievo ai due attributi sottolineati *assegnato* e *ben definito*; noi dobbiamo con essi intendere che *con un numero finito d'operazioni possiamo riconoscere se un certo valore di* y *corrisponde ovvero non ad un valore precedentemente scelto di* x ([4]); e che *con un numero finito di operazioni si può riconoscere se un numero scelto a piacere appartiene o no all' insieme, e se due o più numeri arbitrariamente scelti appartengono o non ad uno stesso suo gruppo* ([5]). Se queste condizioni non sono soddisfatte il concetto di funzione, come quello d' insieme vengono a mancare.

([1]) Tralascierò qui ogni dimostrazione: quella della proposizione fondamentale richiede un'analisi lunga e minuta che sarà sviluppata in un lavoro: *Recherches sur le continu et sur sa puissance*, di prossima pubblicazione, insieme colle principali conseguenze. All'applicazione geometrica che segue ritornerò in un prossimo lavoro: *Sulle corrispondenze armoniche.*

([2]) È noto che ad un gruppo qualunque di variabili, reali o complesse, si può sempre sostituire un'unica variabile reale.

([3]) Cfr. Du-Bois-Reymond, *Die allgemeine Functionentheorie*, p. 215.

([4]) Cfr. Dini, *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabile reale*, ove, nella definizione di funzione (§ 29), è detto che il valore di y *è noto o può esser trovato.* Che i valori della funzione per valori assegnati della variabile siano arbitrari (Jordan, l. c.) è vero in questo senso soltanto che, qualunque sia un insieme di valori della variabile per cui è assegnato il valore della funzione, questa non ne risulta determinata di conseguenza; e, data una funzione che assuma quei valori, ne esistono altre che, pur soddisfacendo a queste condizioni, assumono valori arbitrarî per altri quanti si vogliano valori della variabile.

([5]) Cantor, Acta Matematica, II, pag. 363. — Math. Ann. 20, pag. 114-115. — La definizione dell'insieme ben definito del sig. Cantor, sebbene con maggiori particolari logici, non differisce in sostanza dalla nostra; noi vi aggiungiamo quella della decomposizione dell'insieme in gruppi.

2. Alle conseguenze di queste osservazioni dobbiamo premettere alcune definizioni:

Sia A un insieme *perfetto* di punti appartenenti ad uno spazio con un numero qualunque, anche infinito (numerabile) ([1]), di dimensioni; un altro insieme *a chiuso*, tutto contenuto in A, si dice *non denso in* A se esistono punti di A prossimi quanto si vuole ad ogni punto di *a* e non appartenenti ad *a*.

Se A, anzichè perfetto, è soltanto *chiuso*, *a*, ancora supposto chiuso, si dirà *non denso in* A se, essendo formato con soli punti di A, la sua parte contenuta nel massimo insieme perfetto contenuto in A è non densa in esso.

Un insieme si dirà *di 1ª categoria, completo, rispetto ad* A quando è la somma logica d'un insieme numerabile d'insiemi chiusi non densi in A ([2]).

Un insieme *non chiuso* si dice *non denso in* A se non lo è l'insieme che si ottiene chiudendolo.

Un insieme si dirà di *1ª categoria, incompleto, rispetto ad* A quando è la somma logica d'un insieme numerabile d'insiemi non densi in A, non tutti chiusi.

Ciò posto, ecco il nostro teorema fondamentale:

I. — *Ogni insieme ben definito di punti di uno spazio ad un numero finito o ad un'infinità numerabile di dimensioni, è la somma logica d'un insieme numerabile di differenze fra insiemi chiusi ed insiemi di prima categoria, completi, rispetto ad essi.*

Indicherò alcune applicazioni di questo teorema:

3. Applicazioni alla teoria degl'insiemi. — Limiteremo le nostre considerazioni agl'insiemi contenuti nel continuo lineare: la restrizione non è che apparente poichè si mostra agevolmente che ogni spazio ad un insieme numerabile di dimensioni può rappresentarsi punto per punto sul continuo lineare, in modo che insiemi chiusi si trasformino in insiemi chiusi, ed insiemi non densi in dati altri in insiemi non densi nei trasformati di questi.

Se è ben definita una decomposizione di un insieme lineare in gruppi ([3]), *questi gruppi possono mettersi in corrispondenza biunivoca coi punti di un*

([1]) Un punto *qualunque* di uno spazio con un insieme non numerabile di dimensioni, non può definirsi con un insieme numerabile di condizioni; esso esce quindi dal campo della nostra concezione, o almeno cessa di essere capace di determinazione: esso non potrà mai essere *ben definito*. L'opportunità di questa limitazione segue d'altronde dalla dimostrazione delle nostre proposizioni, su cui non possiamo qui trattenerci.

([2]) Cfr. Baire, l. c., n. 59 e 61, ove però non è fatta distinzione fra gl'insiemi qui chiamati completi, e gl'incompleti che definiremo tosto.

([3]) Vale a dire, se i singoli gruppi sono insiemi ben definiti, e possono quindi concepirsi separatamente l'uno dall'altro.

altro insieme lineare (¹); si può allora costruire un insieme a due dimensioni, formato dai punti di cui una coordinata è l' ascissa di un punto dell' insieme lineare dato, sulla retta che lo sostiene, e l' altra è l' ascissa di uno dei punti del secondo insieme lineare, che corrispondono ai gruppi cui quel punto appartiene.

Nel nuovo insieme corrispondono quindi ad ogni punto del dato tanti punti quanti sono i gruppi cui tal punto appartiene, e su ogni retta su cui è costante la seconda coordinata stanno i punti imagini di tutti i punti di un gruppo.

A questo insieme si applica il teorema I e si ha che

II. — *Ogni gruppo è* (essendo esso stesso un insieme ben definito) *della forma indicata nel teorema I e gli addendi dei singoli gruppi sono segati dalle rette su cui la seconda coordinata è costante sugli addendi analoghi dell' insieme totale.*

4. Dalla proposizione I segue facilmente la seguente, di minor contenuto, ma più semplice, e perciò spesso di più comoda applicazione:

III. — *Ogni insieme di punti è uguale ad un insieme chiuso e denso nello spazio totale, aumentato di un insieme di* 1^a *categoria* (*completo*) *e diminuito di un altro insieme di* 1^a *categoria, in generale, incompleto ; ovvero è uguale alla differenza di due insiemi di* 1^a *categoria, tali che l' insieme da sottrarsi è un insieme numerabile d' insiemi di* 1^a *categoria, incompleti* (*in generale*) *rispetto ai singoli insiemi chiusi che costituiscono l' altro insieme.*

(Un insieme numerabile è un insieme di 1^a categoria (completo) avente per insiemi chiusi componenti i suoi elementi).

Conseguenza immediata di questa proposizione è che *ogni insieme non numerabile di punti del continuo lineare ha la potenza medesima del continuo;* donde la nota proposizione, da tempo enunciata dal sig. Cantor, ma fin qui indimostrata:

IV. — *Il continuo ha la seconda potenza* (²).

(¹) Fatto non evidente senz' altro, ma che risulta dai ragionamenti medesimi che ci conducono al teorema I. Una decomposizione di questo genere si ha evidentemente nell' insieme che rappresenta una funzione, secondo quanto sopra si disse.

(²) Notiamo che in questa proposizione noi non vediamo altro che un' altra forma della precedente: « ogni parte non nnmerabile del continuo ha la potenza del continuo ». Tale era anche il significato attribuito alla proposizione dal sig. Cantor quand' egli l' enunciò la prima volta (V. Giornale di Crelle t. 77, 1877, pag. 327); in seguito alle sue ricerche posteriori il sig. Cantor crede di poter asserire di più che il continuo ha la potenza della seconda classe di numeri (Math. Ann. 21, 1883, pag. 574). Questo noi non possiamo affermare: solo possiamo dire che *la potenza del continuo e quella della* 2^a *classe di numeri non possono essere l' una maggiore dell' altra: se esse sono paragonabili, sono uguali.*

5. Applicazioni analitiche. — Sia $y = f(x)$ una funzione della variabile x; tanto x quanto y potranno indifferentemente essere reali o complesse: per le applicazioni successive noi le supporremo complesse. Consideriamo uno spazio a 4 dimensioni riferito a due piani coordinati: il piano delle x e quello delle y; ad ogni coppia di valori corrispondenti di x e di y facciamo corrispondere il punto che ha per proiezioni sui due piani coordinati le due imagini di Gauss dei detti valori di x e di y. Avremo nell' S_4 un insieme imagine della funzione.

Supponiamo ora che *la $f(x)$ sia definita per tutti i valori della x*: la projezione di detto insieme sopra il piano delle x copre allora l' intero piano. Ora detto insieme è (I) la somma logica di un insieme numerabile di differenze fra insiemi chiusi ed insiemi di 1ª categoria rispetto a questi. La projezione dell' insieme totale sul piano delle x sarà la somma logica delle projezioni degl' insiemi parziali; e affinchè tal somma possa coprire l'intero piano delle x è necessario che almeno una parte di queste projezioni siano insiemi densi su questo piano o su un insieme di regioni di questo piano [1].

Segue di qui agevolmente che, *se la f non è infinitivoca* vale il teorema seguente analogo a III:

V. — *L' insieme rappresentaiivo della funzione* $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ *è uguale ad un insieme chiuso la cui projezione sul piano delle* x *copre l' intero piano, aumentato di un insieme la cui projezione è un insieme di 1ª categoria (completo) rispetto al piano, e diminuito di un insieme la cui projezione è un insieme di 1ª categoria incompleto (in generale).*

6. Applicheremo questa proposizione a completare la risoluzione di alcune equazioni funzionali.

La risoluzione di equazioni funzionali ha occupato più volte i matematici; ricordiamo, ad esempio, le equazioni $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(x+y)\,\varphi(x-y) = 2\varphi(x)\,\varphi(y)$ che si presentano nella risoluzione di questioni geometriche e meccaniche. Le risoluzioni di queste e di parecchie altre equazioni analoghe troviamo raccolte nell' *Analyse Algébrique* del Cauchy (pag. 98-113) *sotto l' ipotesi della continuità* della funzione φ incognita, e un metodo generale per la risoluzione di una classe estesissima di equazioni funzionali ad una o più funzioni incognite ci è dato dall'Abel [2] sotto l' ipotesi, non solo della continuità, ma ancora della *derivabilità* delle funzioni incognite (potendo anzi la derivazione ripetersi parecchie volte).

Noi possiamo ora, in molti casi, rimuovere la condizione della continuità sostituendola con questa sola che *la funzione sia univoca e definita per tutti*

(1) Come si vede, p. e., con un ragionamento analogo a quello del sig. Baire l. c. n.° 59.

(2) V. *Oeuvres*, Christiania, 1881, t. I, pag. 1. *Méthode générale pour trouver les fonctions d'une seule quantité variable, lorsqu' une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables.*

i valori della variabile. In conseguenza della proposizione V noi possiamo infatti enunciare ancora la seguente [1]:

VI. — *Sia* $\varphi(\alpha) = \mathrm{F}[\varphi(\beta), \varphi(\gamma), \ldots, x, y, \ldots]$ *un'equazione funzionale in cui* F *è una funzione continua data delle variabili indicate nella parentesi,* φ *è una funzione da determinarsi,* $x, y, \ldots$ *sono valori arbitrari della variabile,* $\alpha, \beta, \ldots$ *sono funzioni continue date di* $x, y, \ldots$ *ed* α *è tale che, per ogni suo valore, si possono far variare con continuità* $x, y, \ldots$ *per modo che, il valore di* α *restando fisso, variino quelli di* $\beta, \gamma, \ldots$; *se infine come si disse, la funzione* φ *deve essere definita per tutti i valori della variabile* [2]; *la funzione medesima è continua.*

Soddisfanno a queste condizioni le equazioni funzionali citate e le altre considerate dal Cauchy e dall' Abel (fra queste, soltanto quelle con una sola funzione incognita).

7. Un altro risultato notevole, relativo alla teoria delle funzioni, discende dall' enunciato I.

Ricordiamo anzitutto che chiamasi *oscillazione* di una funzione $f(x)$ in un punto la differenza fra il suo massimo (limite superiore) e il suo minimo (limite inferiore) in quel punto [3]. Il sig. Baire [4] dimostra che condizione necessaria e sufficiente perchè l' oscillazione di una funzione abbia il suo minimo — rispetto ad ogni insieme perfetto — nullo in ogni punto (sia punteggiata discontinua rispetto ad ogni insieme perfetto) è che la funzione medesima sia rappresentabile mediante una serie di funzioni continue. Il sig. Baire chiama queste funzioni di classe 1, chiamando di classe 0 le funzioni continue; estende allora questo concetto di classe di una funzione, definendo funzioni della classe $i+1$ quelle che si possono rappresentare mediante serie di funzioni della classe i e non mediante serie di funzioni di classe inferiore. Egli studia poi le funzioni della classe 2 e dimostra che: *se si considerano i valori di una tal funzione in tutti i punti di un insieme perfetto, dopo aver esclusi quelli che corrispondono ai punti di un conveniente insieme di prima categoria rispetto a questo insieme perfetto, e si determina l' oscillazione della funzione residua, il minimo (limite inferiore) di questa oscillazione in ogni punto dell' insieme perfetto è nullo.* Si può però vedere facilmente che questa proposizione non è caratteristica per le funzioni di classe 2 e che anzi, ammessa per le funzioni di classe i, si dimostra per quelle di classe

(1) Proposizioni analoghe si hanno per equazioni funzionali più complesse di quelle considerate in questo teorema.

(2) Si noti che questa condizione è essenziale, non solo alla dimostrazione, ma alla verità della proposizione (Cfr. l'ultima nota del n. 8).

(3) Cfr. Baire, l. c., n. 11. — Du Bois-Reymond, l. c. pag. 229.

(4) L. c. Cap. II, § II e III. V. in particolare la conclusione alla fine del n. 54.

$i+1$. Il sig. Baire infatti, estendendo ancora per limite il concetto di funzioni di classe i a valori transfiniti di i, enuncia che [1] la proprietà sopra enunciata è vera per tutte le funzioni che ammettono il concetto di classe. Noi, in forza del teorema I (o del suo trasformato II), possiamo dire di più che *la proposizione sopra enunciata è vera per tutte le funzioni.*

8. Un'applicazione geometrica. — Chiamiamo *corrispondenza armonica* fra gli elementi di due forme di 1ª specie (che noi rappresenteremo nei punti di una retta) ogni corrispondenza fra questi elementi in cui ad ogni gruppo armonico dell'una forma corrisponda nell'altra un gruppo armonico.

Finchè non si considerano che forme reali, il teorema di v. Staudt c'insegna che la sola corrispondenza armonica è la proiettività. Quando invece si considerano forme complesse, accanto alle proiettività troviamo le antiproiettività, messe in evidenza e studiate dal prof. Segre [2]. Sono ora queste le sole corrispondenze armoniche fra forme complesse, ovvero altre ne esistono? [3]. Le cose che precedono ci mettono in grado di rispondere negativamente alla 2ª parte della domanda: dobbiamo perciò ricordare brevemente le ricerche precedenti sopra questo argomento.

È noto come la dimostrazione di v. Staudt del suo teorema fondamentale sia incompleta richiedendo, per esser ritenuta esatta, oltre l'ipotesi della continuità della retta, quella della continuità della corrispondenza [4]. A completarla il sig. Darboux [5] osserva che, mediante trasformazioni projettive, la ricerca di tutte le corrispondenze armoniche può ridursi a quella delle corrispondenze armoniche fra i punti di una stessa retta in cui tre punti sono uniti: se questi sono i punti di coordinate $0, 1, \infty$, e se $y=\varphi(x)$ è l'equazione della corrispondenza, sarà allora

$$\varphi(0)=0 \qquad \varphi(1)=1 \qquad \varphi(\infty)=\infty$$

Il sig. Darboux dimostra che si deve inoltre avere

$$\text{(1)} \qquad \varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y) \quad , \quad \varphi(x^2)=[\varphi(x)]^2 \qquad \text{(2)}$$

(1) *Sur la théorie des fonctions discontinues.* Comptes Rendus, 11 déc. 1899, t. CXXIX, n. 24.

(2) *Un nuovo campo di ricerche geometriche.* Atti dell'Acc. delle Sc. di Torino, XXV, 1890. 4 Note: v. in particolare la Nota 1ª. Giova notare col prof. Segre che la differenza fra projettività e antiprojettività si manifesta soltanto quando le forme sono sovrapposte.

(3) V. la questione proposta dal prof. Segre nell'« Intermédiaire des mathématiciens » (t. I, 1894, question 322, pag. 182).

(4) V. Klein, *Nachtrag zu dem zweiten Aufsatz ü. Nicht-Eukl. Geom.* Math. Ann. VII.

(5) *Sur le théorème fondamental de la géométrie projective.* Math. Ann. XVII, 1880.

Da queste due equazioni funzionali seguono anche le precedenti relazioni, ed ammettendo che x ed y siano reali (corrispondenza fra i soli punti reali) il sig. Darboux prova che dalle (1) e (2) segue

$$\varphi(x) = x\,.$$

Se ora, conservando tutte le altre ipotesi, si ammette di poter dare ad x valori complessi e si indica con $\bar{x}$ il numero complesso conjugato di x, si vede, col prof. Segre, che la φ ammette le due forme

$$\varphi(x) = x \quad , \quad \varphi(x) = \bar{x}\,;$$

onde le projettività e le antiprojettività.

Ma togliamo la condizione che ad x reali corrispondano $\varphi(x)$ reali; saranno ora possibili nuove forme per la $\varphi(x)$?

Osserviamo che l' equazione (1) soddisfa alle condizioni dell'enunciato VI; se adunque la funzione φ dev' esser definita per tutti i valori di x, deve essere continua [1]. Donde subito che $\varphi(x)$ avrà la forma (supposto x complesso ed uguale a $\xi + i\eta$).

$$\varphi(\xi + i\eta) = a\xi + ib\eta \qquad (a \text{ e } b \text{ costanti reali o complesse})$$

e dovendo essere soddisfatta la (2)

$$\varphi(\xi + i\eta) = \xi + i\eta \qquad \text{ovvero} \qquad = \xi - i\eta.$$

VII. — *Le sole corrispondenze armoniche sulla retta complessa sono le projettività e le antiprojettività.*

[1] L'ordinaria geometria projettiva considera, come abbiamo fatto qui, la retta completa con tutti i suoi punti razionali ed irrazionali (e lo stesso dicasi per tutte le forme): però è evidente che, tolte le poche proposizioni, che, come questa di v. Staudt richiedono la continuità, essa si può costruire con forme incomplete; e per esempio, se non si studiano che formazioni algebriche, non occorrerà attribuire alla retta che i soli punti algebrici (reali o complessi). Si può, in queste ipotesi, mostrare che sono possibili infinite corrispondenze armoniche discontinue. Si vede così come sia essenziale l'ipotesi che la funzione φ sia definita per tutti i valori razionali e irrazionali di x per poterne affermare la continuità.