

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCXCVII.
1900

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IX.

2° SEMESTRE.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1900

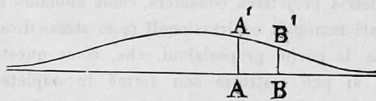
Fisica. — *Sulla forma della superficie libera di un liquido pesante in presenza di un corpo elettrizzato.* Nota di ALFONSO SELLA, presentata dal Socio BLASERNA.

1. La superficie piana di un liquido pesante si deforma quando dal di sopra si avvicini ad essa un corpo elettrizzato. Mi propongo di determinare questa deformazione nel caso che la superficie del liquido pesante sia infinitamente estesa, che il liquido sia conduttore e che il corpo elettrizzato sia una sfera conduttrice.

Supponiamo per un momento che la superficie del liquido sia rigida. La presenza del corpo elettrizzato produrrà in essa una certa distribuzione elettrica e supponiamo conosciuta la densità σ in ogni elemento del piano e corrispondentemente la tensione elettrostatica $P = 2\pi\sigma^2$. Se noi supponiamo il liquido sottoposto alla pressione atmosferica, noi possiamo concludere che questa viene diminuita in ogni elemento superficiale del valore P . Quindi se noi lasciamo adesso il liquido a sè, avverrà un sollevamento della massa liquida maggiore là dove è maggiore P . (Si realizzerebbe così sotto forma di equilibrio stabile il caso di un mare, la cui superficie piana si deforma, quando la pressione atmosferica presenta delle variazioni sensibili da una porzione all'altra di essa).

Noi vogliamo ammettere che la deformazione sia così piccola da non alterare sensibilmente la distribuzione elettrica che si avrebbe se la superficie rimanesse piana. Così per il calcolo di P noi potremo seguire a considerare la superficie libera come piana. Questa prima approssimazione del problema ne rende possibile la soluzione nel caso da noi scelto.

2. Determiniamo dunque il sollevamento in funzione di P .



Se il sollevamento in A vale AA' e quello in B vale BB' , la differenza di pressione esterna, ossia la differenza di tensione elettrica nei due punti A' e B' , sarà eguale alla pressione di una colonna liquida dell'altezza $AA' - BB'$; come si vede immaginando un tubo comunicante nell'interno del liquido fra A' e B' . Ora poichè all' ∞ si annullano sia la densità elettrica, sia il sollevamento, si avrà senz'altro

$$(1) \quad P = gd\zeta$$

in cui P è la tensione elettrica nel punto considerato, g la gravità, d la densità del liquido e ζ rappresenta il valore del sollevamento contato a partire dalla superficie piana primitiva.

È bene notare che in questo stato di cose un elemento di volume del liquido immediatamente sotto alla superficie si trova in equilibrio; ma non così un elemento superficiale, giacchè delle azioni che subisce, cioè pressione atmosferica, tensione elettrica e gravità, le due prime sono normali ad esso e quindi non può la risultante essere in quel punto normale alla superficie. Questo elemento dovrebbe quindi scivolare in basso; naturalmente entrano qui in giuoco le forze di coesione, che insieme con le altre mantengono in equilibrio anche l'elemento superficiale. D'altronde è la coesione che impedisce al velo liquido superficiale di gettarsi sul corpo elettrizzato abbandonando il resto della massa liquida; ed è ancora la coesione che fa sì che si otterrebbe la medesima deformazione superficiale, anche se non ci fosse la pressione atmosferica esterna, come abbiamo supposto sinora.

3. Ciò posto ritorniamo al nostro problema e supponiamo dapprima che la distanza fra la sfera ed il piano sia così grande rispetto al raggio della sfera da poter considerare la sfera elettrizzata come sostituita da una massa elettrica μ posta nel centro della sfera.

Se h è la distanza del punto μ dal piano, la densità elettrica σ in un punto del piano alla distanza r dal piede della perpendicolare abbassata da μ sul piano è data da (Maxwell, *Treatise*, I, 161):

$$\sigma = \frac{h\mu}{2\pi} \frac{1}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

da cui si ricava immediatamente

$$P = \frac{h^2 \mu^2}{2\pi} \frac{1}{(r^2 + h^2)^3}$$

ed ancora per la (1)

$$(2) \quad \zeta = \frac{h^2 \mu^2}{2\pi g d} \frac{1}{(r^2 + h^2)^3}$$

e se in luogo di μ noi poniamo il prodotto del potenziale E della sfera per il suo raggio a

$$(2') \quad \zeta = \frac{E^2}{2\pi a^2 g d} \frac{h^2}{a^2} \frac{1}{\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{h^2}{a^2}\right)^3}$$

Il raggio del cerchio, che limita la porzione convessa dalla concava della superficie di sollevamento, è dato da quel valore di r che annulla $\frac{d^2 \zeta}{dr^2}$ ossia da

$$r = \frac{h}{\sqrt{7}}$$

ed è così proporzionale alla distanza fra il piano e la massa elettrica ed è indipendente da questa.

Il raggio di curvatura ρ della superficie nel punto ombelicale immediatamente al disotto del punto elettrizzato, è dato da

$$(3) \quad \frac{1}{\rho} = \left(\frac{d^2 \zeta}{dr^2} \right)_{r=0} = \frac{3\mu^2}{\pi g d h^3} = \frac{3E^2 a^2}{\pi g d h^3}$$

la quale formola mostra che la curvatura in quel punto è proporzionale al quadrato del potenziale della sfera ed inversamente proporzionale alla sesta potenza della distanza tra la sfera ed il piano.

Finalmente notando che il sollevamento ζ_0 nel medesimo punto ombelicale, che è il più alto, è dato da $\zeta_0 = \frac{u^2}{2\pi g d h^4}$, si ha la relazione

$$(4) \quad \rho \zeta_0 = \frac{h^2}{6}.$$

Questa relazione estremamente semplice ci permette — poichè la grandezza più facilmente accessibile alla misura sperimentale è appunto il raggio di curvatura ρ — di apprezzare sino a qual punto sia permesso di supporre, come noi abbiamo fatto, che la distribuzione elettrica non venga alterata dalla deformazione della superficie. Così se p. es. si pone $\rho = 100$ metri, cioè una grandezza facilmente misurabile, e $h = 1$ cm. si avrebbe $\zeta_0 = \frac{1}{6}$ di micron circa, ossia un sollevamento estremamente piccolo; tanto che se si supponesse ora h diminuito di questo valore, si avrebbe un aumento della curvatura di un decimillesimo, ricavandosi dalla (3) $\frac{d\rho}{\rho} = 6 \frac{dh}{h}$.

3. Passiamo ora al caso di una sfera conduttrice con raggio finito. Il problema della distribuzione elettrica sopra il piano si può ricondurre immediatamente ad un altro, di cui è nota la soluzione. Infatti, per il principio delle immagini elettriche del Kelvin, il campo elettrico generato dalla sfera al potenziale E e dal piano infinito, che è necessariamente a potenziale zero, è eguale nel semispazio dalla parte della sfera al campo generato dalla sfera E stessa e da una sfera eguale a potenziale $-E$ disposta simmetricamente alla prima sfera rispetto al piano. Ora il problema del campo generato da due sfere conduttrici a determinato potenziale è interamente risolto dopo le ricerche del Kirchhoff seguite a quelle di Poisson e Plana.

Partiamo dall'espressione del potenziale in un punto P dello spazio esterno alle due sfere, quale viene data dal Mathieu (*Théorie du potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme*, Paris 1886, II, pag. 61).

Nella notazione del Mathieu le due sfere hanno i raggi a e b , i potenziali C e G e sono situate alla distanza c fra i due centri. La posizione del punto P è determinata dalla distanza r dal centro della sfera di raggio a

e dal coseno μ dell'angolo che il raggio vettore al centro della sfera a fa con l'asse di simmetria, cioè colla congiungente i centri delle due sfere. Allora il potenziale V_1 in P, dovuto alla distribuzione elettrica sopra la sfera di raggio a , è dato da

$$V_1 = \frac{a^2}{r} \frac{Cb}{a} (i_1 - i) \sum_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_n^2 - 2A_{n-1} A'_n \mu \frac{a}{r} + A_{n-1}^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2}} - \frac{a^2}{r} \frac{Gb}{a} (i_1 - i) \sum_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_n^2 - 2A_n B_n \mu \frac{a}{r} + B_n^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2}}$$

in cui si è posto

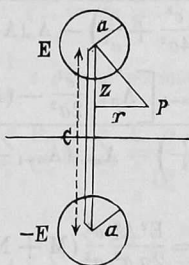
$$A_n = c(i_1^{n+1} - i^{n+1}) \\ B_n = (a + bi) i_1^{n+1} - (a + bi_1) i^{n+1} \\ A'_n = (a + bi_1) i_1^n - (a + bi) i^n$$

$$i_1 = \frac{g}{2} + \sqrt{\frac{g^2}{4} - 1}, \quad i = \frac{g}{2} - \sqrt{\frac{g^2}{4} - 1}, \quad g = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab}$$

Nel nostro caso si ha

$$a = b, \quad C = -G = E.$$

Inoltre se determiniamo la posizione del punto P mediante la distanza s di P dal centro della sfera a contata lungo l'asse di simmetria e la distanza r



contata normalmente all'asse di simmetria, potremo, dopo facili trasformazioni, osservando che $ii_1 = 1$, porre l'espressione di V_1 nella seguente forma:

$$(5) V_1 = EA_1 \left\{ \sum_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(A_{n+1} + A_n)^2 \frac{s^2 + r^2}{a^2} - 2A_n (A_{n+1} + A_n) \frac{c}{a} \frac{s}{a} + A_n^2 \frac{c^2}{a^2}}} - \sum_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n+1}^2 \frac{c^2}{a^2} \frac{s^2 + r^2}{a^2} - 2A_{n+1} (A_{n+1} + A_n) \frac{c}{a} \frac{s}{a} + (A_{n+1} + A_n)^2}} \right\}$$

in cui si è posto:

$$A_n = i_1^n - i^n$$

$$i_1 = \frac{g}{2} + \sqrt{\frac{g^2}{4} - 1}, \quad i = \frac{g}{2} - \sqrt{\frac{g^2}{4} - 1}, \quad g = \frac{c^2 - 2a^2}{a^2}.$$

Ora per trovare il valore della tensione P sul piano basta osservare che

$$P = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_{z=\frac{c}{2}}^2$$

se V è il potenziale dovuto alle due distribuzioni, sulla sfera a e sulla sfera b. Ma nel nostro caso si ha evidentemente

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_{z=\frac{c}{2}} = 2 \left(\frac{\partial V_1}{\partial s} \right)_{z=\frac{c}{2}}$$

e sarà quindi

$$P = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial V_1}{\partial s} \right)_{z=\frac{c}{2}}^2$$

Ora dalla (5) si ricava

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial s} \right)_{z=\frac{c}{2}} = \frac{EA_1}{a} \frac{c}{a} (M + N)$$

ove si ponga

$$M = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \frac{(A_{n+1} + A_n)(A_{n+1} - A_n)}{\left\{ (A_{n+1} + A_n)^2 \left(\frac{c^2}{4a^2} + \frac{r^2}{a^2} \right) - A_n(A_{n+1} + A_n) \frac{c^2}{a^2} + A_n^2 \frac{c^2}{a^2} \right\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$N = \sum_0^{\infty} \frac{A_{n+1} \left[A_{n+1} \frac{c^2}{2a^2} - (A_{n+1} + A_n) \right]}{\left\{ A_{n+1}^2 \left(\frac{c^4}{4a^4} + \frac{c^2 r^2}{a^4} \right) - A_{n+1}(A_{n+1} + A_n) \frac{c^2}{a^2} + (A_{n+1} + A_n)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

E così si avrà

$$P = \frac{E^2 A_1^2 c^2}{2\pi a^2 a^2} (M + N)^2$$

e finalmente per la (1):

$$(6) \quad \zeta = \frac{E^2 A_1^2 c^2}{2\pi a^2 g d a^2} (M + N)^2$$

che ci dà il sollevamento ζ della superficie liquida contato a partire dal piano primitivo all'insù, per un punto alla distanza r dal piede della perpendicolare abbassata dal centro della sfera sul piano. La (6) corrisponde alla (2).

Ora, come già abbiamo osservato, il dato che importa di conoscere dal punto di vista sperimentale è il raggio di curvatura ρ nel punto centrale

ombelicale, il quale sarà dato come prima da

$$\frac{1}{\varrho} = \left(\frac{d^2 \zeta}{dn^2} \right)_{n=0}.$$

Si trova così facilmente

$$(7) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\pi g d} \frac{3E^2}{a^4} A_1^2 \frac{c^2}{a^2} HK$$

in cui si è posto

$$H = 4 \frac{a^3}{c^3} \sum_0^{\infty} \frac{A_{n+1} + A_n}{(A_{n+1} - A_n)^2} + \sum_0^{\infty} \frac{A_{n+1}}{\left(A_{n+1} \frac{c^2}{2a^2} - (A_{n+1} + A_n) \right)^2}$$

$$K = 16 \frac{a^5}{c^5} \sum_0^{\infty} \frac{(A_{n+1} + A_n)^3}{(A_{n+1} - A_n)^4} + \frac{c^2}{a^2} \sum_0^{\infty} \frac{A_{n+1}^3}{\left(A_{n+1} \frac{c^2}{2a^2} - (A_{n+1} + A_n) \right)^4}.$$

Che poi ciascuna delle 4 serie, che compongono le espressioni di H e K sia convergente, lo si verifica immediatamente mostrando che il rapporto fra due termini successivi tende a diventare $\frac{1}{i_1}$; lo stesso comportamento hanno d'altronde tutte le serie, che abbiamo incontrato precedentemente, ciò che giustifica le operazioni di derivazioni eseguite sopra di esse.

Ancora si trova per il prodotto $\varrho \zeta_0$, essendo ζ_0 il sollevamento nel punto centrale

$$(8) \quad \varrho \zeta_0 = \frac{a^2}{6} \frac{H}{K}.$$

Le due espressioni per $\frac{1}{\varrho}$ e $\varrho \zeta_0$ si possono anche porre sotto la forma:

$$(7') \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{3E^2 a^2}{\pi g d \left(\frac{c}{2} \right)^6} A_1^2 \left\{ \sum_0^{\infty} \frac{B_n}{C_n^2} + \sum_0^{\infty} \frac{A_{n+1}}{c D_n^2} \right\} \left\{ \sum_0^{\infty} \frac{B_n^3}{C_n^4} + \sum_0^{\infty} \frac{A_{n+1}^3}{c D_n^4} \right\}$$

$$(8') \quad \varrho \zeta_0 = \frac{\left(\frac{c}{2} \right)^2}{6} \frac{\sum_0^{\infty} \frac{B_n}{C_n^2} + \sum_0^{\infty} \frac{A_{n+1}}{c D_n^2}}{\sum_0^{\infty} \frac{B_n^3}{C_n^4} + \sum_0^{\infty} \frac{A_{n+1}^3}{c D_n^4}}$$

ove si facciano le posizioni:

$$A_n = (i_1^n - i^n) \frac{a^2}{c^2}, \quad B_n = A_{n+1} + A_n, \quad C_n = A_{n+1} - A_n$$

$$D_n = A_{n+1} - \frac{2a^2}{c^2} (A_{n+1} + A_n).$$

Osservando che per c grande rispetto ad a , le A_0, B_0, C_0, D_0 tendono all'unità mentre le successive $A_1, A_2 \dots B_1, B_2 \dots$ ecc. tendono a 0, si vede subito in qual modo le (7') ed (8') passano nelle (3) e (4), osservando che ad h corrisponde adesso $\frac{c}{2}$.

Alcune delle serie che compaiono nelle espressioni precedenti possono mettersi sotto altre forme; e valga come esempio

$$\sum \frac{A_{n+1} + A_n}{(A_{n+1} - A_n)^2} = \frac{1 + \frac{1}{i}}{\left(1 - \frac{1}{i}\right)^2} \left\{ \frac{1}{i-1} - \frac{3i}{i^3-1} + \frac{5i^2}{i^5-1} - \frac{7i^3}{i^7-1} + \dots \right\}$$

nella quale però il cambiamento di forma non è di vantaggio quanto a rapidità di convergenza.

In genere la convergenza delle nostre serie è discreta sino a che la distanza fra piano e sfera non diventa piccola; non bisogna però dimenticare che con distanza piccola, come pure con valori di E molto grandi, cadrebbe l'ipotesi fondamentale nostra, base dei calcoli, che cioè si possa ammettere che la deformazione della superficie non alteri la distribuzione elettrica.

Seguono i risultati dei calcoli numerici istituiti per e , secondo la formola (7) ovvero secondo la formola (3), nel caso del mercurio e per $E = 1$ (in unità elettrostatiche). Si ha allora $g = 981$, $d = 13,56$. I valori di a, h, e sono espressi in centimetri, si è posto $a = 1$. Nella prima colonna stanno i valori di h , nella seconda i valori di e secondo la (7), nella terza i valori di e secondo la formola (3):

| h | e | e |
|-----|-----------------------|-----------------------|
| 100 | $1,385 \cdot 10^{16}$ | $1,393 \cdot 10^{16}$ |
| 10 | $1,259 \cdot 10^{10}$ | $1,393 \cdot 10^{10}$ |
| 2 | $3,878 \cdot 10^5$ | $8,915 \cdot 10^5$ |
| 1,1 | $1,843 \cdot 10^2$ | $2,468 \cdot 10^4$ |

Questa piccola tabella mostra entro quali limiti e con quale esattezza si può sostituire la (3) alla (7).