ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

che abbiano coefficienti appartenenti ad un dato campo K, è possibile (1) di costruire una funzione razionale $x = f_1(y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1)$ delle radici delle precedenti equazioni, tale che, eliminando da queste le variabili $y, z, \dots u, v, w$, si ottenga per risultante in x l'equazione $F(x) = 0$, (5) le cui radici siano distinte, la quale gode della proprietà per cui, denotando con x_1 una di queste radici, si ha l'eguaglianza:

$$(K, x_1) = (K, y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1).$$

Poichè il sistema, che si ottiene aggregando alle equazioni (4) l'equazione: $x = f_1(y, z, \dots w)$, non è che un caso particolare del sistema (1), così potremo applicare alla (5) i risultati ottenuti in questa Nota.

Matematica. — *Un nuovo carattere distintivo dei gruppi di sostituzioni.* Nota del Dr. LUIGI FANTAPPIÈ, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Finora i gruppi di sostituzioni sopra lettere venivano distinti in transitivi e intransitivi, primitivi e imprimitivi, ecc.; e corrispondentemente avevamo un'importante classificazione delle equazioni algebriche a seconda dei loro gruppi di Galois (2).

A completare tale classificazione introdurremo ora il nuovo concetto di *sistaticità* di un gruppo di sostituzioni, importante sopratutto per ciò che riguarda l'esprimibilità di una radice in funzione razionale di un'altra; argomento questo da me già trattato per via prevalentemente algebrica in una precedente Nota (3).

2. Diremo dunque che un gruppo di sostituzioni G_N è *sistatico* quando tutte le sue sostituzioni che lasciano fissa una lettera lasciano fisse anche altre lettere, *asistatico* nel caso contrario (4).

Consideriamo ora un gruppo transitivo G_N di sostituzioni su n lettere $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$. Le sue sostituzioni che lasciano fissa una lettera, ad es. ϑ_1, formeranno un sottogruppo Γ_m d'ordine m uguale a $\frac{N}{n}$; inoltre i sottogruppi

(1) Cfr. Weber, opera già citata.

(2) Cfr. L. Bianchi. *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*. Pisa. Spoerri. 1900.

(3) Luigi Fantappiè. *Alcuni teoremi sulle equazioni algebriche.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. vol. XXXI, serie 5ª. 2° sem.,; settembre 1922.

(4) Queste definizioni, come anche alcuni teoremi che seguono (N. 4 e 5), ricordano definizioni e proprietà analoghe dei gruppi continui finiti di trasformazioni. Cfr. L. Bianchi. *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni.* Pisa. Spoerri, 1918, § 70 e 71, pag. 185 e seg.

che lasciano fisse $\vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ saranno i trasformati di Γ_m mediante certe sostituzioni $g_2, \ldots, g_n$ che portino ϑ_1 in $\vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ rispettivamente. Se il gruppo G_N, oltre ad esser transitivo, è anche sistatico, tutte le m sostituzioni di Γ_m oltre ϑ_1 (che indicheremo ora con ϑ_{11}) dovranno lasciar fisse anche altre lettere che indicheremo con $\vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$. D'altra parte le sostituzioni che lasciano fisse $\vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ sono anch'esse in numero di m essendo quelle dei gruppi $g_{21}^{-1}\Gamma_m g_{21}, \ldots, g_{1\nu}^{-1}\Gamma_m g_{1\nu}$ rispettivamente; quindi le m sostituzioni di Γ_m sono appunto tutte e sole quelle sostituzioni che lasciano fisse $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$. Si ha così che:

In un gruppo transitivo G_N, *se tutte le sostituzioni che lasciano fissa una lettera* ϑ_i *lasciano fissa anche un'altra lettera* ϑ_k, *viceversa tutte le sostituzioni che lasciano fissa* ϑ_k *lasciano fissa anche* ϑ_i.

3. Essendo le $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ in posizione perfettamente equivalente l'una rispetto all'altra, diremo che queste lettere formano un *sistema di sistaticità* del gruppo G_N, sistema caratterizzato dunque dal fatto che tutte le sostituzioni di G_N che lasciano fissa una sua lettera lasciano fisse anche tutte le altre lettere.

Avendo supposto G_N transitivo esisterà poi una sostituzione g_{21} che porterà ϑ_{11} in ϑ_{21} fuori del suo gruppo di sistaticità, e sarà $g_{21}^{-1}\Gamma g_{21}$ il sottogruppo delle sostituzioni di G_N che lasciano fissa ϑ_{21}. Ma le sostituzioni di questo sottogruppo, trasformato di Γ_m mediante la g_{21}, lasceranno fissa non soltanto ϑ_{21} ma anche tutte le altre lettere $\vartheta_{22}, \ldots \vartheta_{2\nu}$ in cui g_{21} porta $\vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ rispettivamente e nessun'altra; che se infatti le sostituzioni g' di $g_{21}^{-1}\Gamma g_{21}$ lasciassero fissa anche un'altra lettera $\vartheta_{2,\nu+1}$, le sostituzioni $g_{21}\, g'\, g_{21}^{-1}$ di Γ_m dovrebbero lasciar fissa anche la lettera $\vartheta_{1,\nu+1}$ portata da g_{21} in $\vartheta_{2,\nu+1}$, contro l'ipotesi che le $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ esauriscano il sistema di sistaticità prima considerato. Questo sottogruppo $g_{21}^{-1}\Gamma g_{21}$ sarà dunque costituito da tutte quelle sostituzioni di G_N che lasciano fisse $\vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu}$, le quali costituiranno, per ciò che s'è visto, un altro *sistema di sistaticita* di G_N. Se le $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}, \vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu}$ non esauriscono tutte le n lettere ϑ, operando analogamente con una nuova sostituzione g_{31} che porti ϑ_{11} fuori di questi due sistemi di sistaticità, se ne verrebbe a trovare un terzo, e così via fino ad esaurire tutte le n lettere che verranno quindi a distribuirsi in un certo numero h di sistemi di sistaticità; e sarà $n = h\nu$. Segue di qui che:

In un gruppo G_N *transitivo e sistatico le* n *lettere su cui operano le sue sostituzioni si distribuiscono in un certo numero* h, *divisore di* n, *di sistemi di sistaticità, contenente ognuno un medesimo numero* ν, *pure divisore di* n, *di lettere.*

4. Il metodo sopra riportato, che ci ha condotto alla determinazione dei varî sistemi di sistaticità, ci fa vedere inoltre che se una lettera di un

sistema, p. es. ϑ_{11}, è portata da una sostituzione in una di altro sistema, p es. ϑ_{21}, anche tutte le altre lettere del 1° sistema sono portate in quelle del 2°; cioè le sostituzioni di G_N portano le lettere di uno stesso sistema di sistaticità ancora nelle lettere di un medesimo sistema. Si ha quindi che:

Un gruppo G_N *transitivo e sistatico è anche imprimitivo, e gli* h *sistemi di sistaticità costituiscono altrettanti sistemi d'imprimitività.*

5. Osserviamo che *un gruppo con transitività multipla è certamente asistatico*; poichè altrimenti, per il teorema precedente, sarebbe anche imprimitivo, il che è assurdo.

6. Poichè un gruppo G_N transitivo e sistatico è anche imprimitivo (N. 4), le sue sostituzioni scambieranno gli h sistemi d'imprimitività, che indicheremo con $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h$, secondo le sostituzioni di un nuovo gruppo $G_N^{(1)}$, in isomorfismo con G_N, che potrà eventualmente essere anch'esso sistatico. Se sono allora $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \ldots, \theta_{i\nu'}$ ($i = 1, 2, \ldots, h'$ e $h = h'\nu'$) i suoi h' sistemi di sistaticità, diremo anche che gli h sistemi di sistaticità *del prim'ordine* del gruppo G_N si sono riuniti ν' a ν' in h', divisore di h, sistemi di sistaticità *del secondo ordine* (ognuno di $\nu\nu'$ lettere) dello stesso gruppo G_N; e analogamente si potranno definire i sistemi di sistaticità del 3°, 4° ordine, ecc. Diremo anche, in questi casi, che il gruppo G_N è doppiamente, triplamente sistatico, ecc. È chiaro inoltre che tutte le sostituzioni di G_N che scambiano tra loro le lettere di un medesimo sistema d'ordine r, scambieranno pure tra loro le lettere di tutti gli altri sistemi d'ordine r appartenenti allo stesso sistema d'ordine $r+1$.

7. Vediamo ora quale è l'interpretazione algebrica della sistaticità di un gruppo. Sia perciò G_N il gruppo di Galois di una certa equazione irriducibile

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 .$$

Se G_N, oltre ad esser transitivo, è anche sistatico ed è $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ un suo sistema di sistaticità del 1° ordine, significa che il sottogruppo numerico Γ_m di ϑ_{11} è lo stesso di quello di $\vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$, e che quindi, aggiunta al campo di razionalità la radice ϑ_{11}, le altre $\vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ sono razionalmente note perchè possono concepirsi come funzioni delle radici invarianti per le sostituzioni del nuovo gruppo di Galois Γ_m, a cui s'è abbassato G_N dopo l'introduzione di ϑ_{11} [1]; cioè *le radici di un medesimo sistema di sistaticità del 1° ordine sono esprimibili razionalmente l'una per l'altra*.

Se poi G_N è doppiamente sistatico, il sottogruppo numerico di una funzione simmetrica φ delle radici $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$, di un medesimo sistema del 1° ordine, coincide con quello di un'altra qualsiasi funzione simme-

[1] Cfr. L. Bianchi. *Gruppi di sostituzioni*, ecc.

trica $\psi(\vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu})$ quando il sistema del 1° ordine $\vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu}$ appartenga al medesimo sistema di 2° ordine del precedente, e quindi, per la solita ragione, sarà ψ esprimibile razionalmente per φ. Analogamente accadrebbe pei sistemi d'ordine superiore e in conclusione si ha dunque che:

Se $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ *e* $\vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu}$ *sono due sistemi di sistaticità del medesimo ordine* r, *appartenenti a uno stesso sistema d'ordine* $r+1$, *qualsiasi funzione razionale e simmetrica di* $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ *è razionalmente esprimibile per un'altra qualsiasi funzione razionale e simmetrica di* $\vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu}$.

Matematica. — *Nouveaux théorèmes sur les singularités des séries entières.* Nota di MILOŠ KÖSSLER, presentata dal Corrispondente G. FUBINI.

Dans cette Note je poursuis l'étude initiée dans une Note précédente (Ces Rendiconti, vol. XXXII, 1° sem., pag. 26: *Sur les singularités* ecc.).

1. Faisant usage du théorème II de la Note citée, on peut obtenir, ne changeant que les angles φ_N, qu'un point $e^{i\psi}$, choisi à volonté sur la circonférence du cercle de convergence, devienne singulier pour $f(z)$. Cas particulier de tels changements est l'addition de l'angle π ou le changement du signe de a_n. À cet effet choisissons la suite (5) de façon que les nombres A_{N_q}, dans lesquels les membres de (5) occupent des positions distinguées, définissent des groupes des a_n sans élément communs à deux: c'est-à-dire que les groupes $N_q^{\text{ième}}$ et $N_r^{\text{ième}}$ soient sans élément commun, toute fois que $q \geqq r$. Or il suffit à cet effet de choisir la suite (5) de manière que

$$n_{q+1} \geqq 2(1+\lambda)\, n_q, \tag{7}$$

λ étant une constante positive arbitrairement petite. Dans ce cas, le nombre N_q appartenant à n_q satisfait, d'après (2), aux inégalités

$$\nu - \gamma\nu^{\frac{2}{3}-\vartheta} < n_q < \nu + \gamma\nu^{\frac{2}{3}+\vartheta} \qquad \nu = \left[\frac{N_q}{4}\right],$$

d'où, par un calcul facile,

$$N_q > 4n_q(1-\eta_0)\,,\ N_q < 4n_q(1+\eta_1)\,,\ N_q - \left[\frac{N_q}{2}\right] > 2n_q(1-\eta_2),$$

$$\lim \eta_0 = \lim \eta_1 = \lim \eta_2 = 0\ ,\ q \to \infty.$$

Les termes a_n du $N_{q+1}^{\text{ième}}$ groupe commencent par le plus petit index

$$n = N_{q+1} - \left[\frac{N_{q+1}}{2}\right];$$